Conatuum Theoriam linearum Parallelarum stabiliendi præcipuorum

brevis recensio,

quam

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROLUS JOH. D:S. HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.

lauream ambiens submittit

MART. AUG. WILH. KULLBERG,

Vestrogothus.

In Lyceo Carol. die XXI Dec. MDCCCXLIII.

P. II.

LUNDÆ,

TYPIS BERLINGIANIS,

MDCCCXLIII.

Patri Optimo

sacrum voluit

pietas filii.

adgrediuntur, alii vero mendum aliquod in istis latere suspicantur, ideoque vel aliud axioma vel aliam definitionem modo parallelarum, modo anguli, modo rectæ lineæ, vel harum rerum plurima admittenda, et igitur Euclidis disciplinam magis minusve ab ovo reconstruendam censent. Illi vero immediate Euclidæum axioma vel Prop. XXIX demonstrandam suscipiunt, vel etiam aliam propositionem (plerumque XXII) præmittendam censent. His vero jam totam divisionem omnium hac de re conatuum adæquate absolutam & expeditam censemus: plura enim *theoremata* inter Prop. Eucl. L. 1. XXVIII & XXX intercalanda esse, omnibus fere commune est. Quod vero ad *Postulata* atque *problemata* attinet, horum nullam fere in parte theoretica mentionem faciendam censemus. Si enim alicujus sint momenti, cathegorice exprimenda sunt, ideoque vel axiomata vel theoremata constituent. Attamen si vere Euclidæi essse volumus, problemata constructioni propositionum necessaria admittamus, vel saltem demonstremus, tales constructiones majoribus haud laborare difficultatibus, ac ipsa postulata, quæ Euclides proposuit. — Recte igitur divisimus. Atttamen alio respectu & alia divisio institui potest. Eorum enim, qui hac de re scripserunt nonnulli res quam maximi abstrusas, ut infiniti magni vel parvi considerationem vel etiam functionum theoriam in usum vocarunt, alii vero, & recte quidem, rem haudquaquam alio modo, ac qui elementis accomodatus sit, tractandam crediderunt. — Jam igitur ipsa divisione rite instituta, ad ipsos Theoriam Parallelarum demonstrandi conatus propius accedamus.

Primum igitur, quod eos attinet conatus, in quibus novum ponitur *axioma:* jam per se patet, horum conatuum nullum fere ad scientiam augendam conferre. Dato enim Theoremate, quod demonstretur, nempe

Prop. XXIX Lib. 1. Elem. Eucl. vel etiam Prop. XXXII, quæ mutuo vinculo ita conjunguntur, ut stabilito horum alterutro, alterum facile demonstretur; nemo non inde gradatim a propositione ad propositionem nullo fere negotio, communis nempe ope analyseos, procedere potest: deindeque hac ultima propositione axiomatis instar posita, absque mora inverso ordine ad ipsam propositionem demonstrandam regrediendi ei erit facultas. Ejusmodi igitur conatibus nullum debetur meritum, nisi ultima illa propositio veri atque genuini axiomatis nomine digna sit. Hoc vero casu ipsa immediate ex definitionibus colligeretur; quod vero cum ad definitiones Euclidæas, quales vulgo intelliguntur, ut constat, non succedat, ipsæ definitiones mutandæ sunt; ideoque hic casus ad aliam referendus erit classem. Si vero aliqua propositio gratuito admittenda sit; idem fere valet, si ipsum Eucl. Ax. XII vel aliud quodcunque tibi adsciscas in auxilium. Semper enim filum demonstrationis alicubi abrumpatur, necesse est.

Quin imo axiomata plurimis admissa, revera nihil aliud sunt, quam ipsum Euclidæum aliquantum aliter expressum. Hoc ex. gr. aliquantum simplicius (ideoque magis naturale) exprimitur, si dixeris, lineas, quæ inæqualibus gaudent angulis alternis, alicubi concurrere, ideoque haud parallelas esse. Paululum inde differt illud, quod in Strömeri versione Elementorum legis: lineam alterutram parallelarum secantem etiam alteram secare vel attingere, (ideoque cum hac concurrere, nec ideo huic parallelam esse *). — Unam igitur classem generatim dijudicavimus.

---

*) **Quod König et Huber etiam admiserunt. Proclus vero latera anguli infinite iuvicem divergentia posuit. Idem Nasaraddin, Malezian, Karsten, Hoffmann sen-**

Quod vero cum ad reliquas haudquaquam succedat, temporisque brevioris habenda sit ratio, nonnisi unum alterumque utriusque classis exemplum nobis attingendum, credidimus; et ejusmodi quidem, quod antea a nullo dijudicatum est.

Secundo loco igitur ad eos nos convertimus auctores, qui Euclidaicis minus contenti, novas composuerunt *Definitiones.* Nonnulli errorem in ipsa *rectæ lineæ* notione jacere crediderunt, ut *Voigtius* atque *Langsdorffius,* quos modo laudatus Wahlius recensuit. Alii *anguli* immutarunt definitionem: quos inter præ reliquis eminet Jacobi Jenensis *). Maxima vero auctorum turba in ipsa linearum parallelarum

---

serunt. Lorenz vero, rectam latera secantem per punctum interius datum duci posse, postulavit. Simplicissima forsan enuntiatio hæc erit: *per datum punctum non nisi unam datæ parallelam duci posse.* Quod si admiseris, demonstratio axiomatis Euclidæi vel similis, vel Prop. XXIX, cujus causa hoc proponebatur, facile succedet. Si enim contenderis, parallelas *HAG, EBF* æqualibus necesssario haud gaudere angulis alternis *HAB*, *ABF,* sed esse $HAB < ABF$ dixeris; (vide Fig. in demonstratione Axiomatis XII Strömeriana), per punctum intersectionis A illius *HAG* et secantis vel transversalis *KAB* ducas *CAD* ita, ut sit angulus *CAB* seu externus $KAD = ABF$ interno æqualis, quare ex Prop. XXVIII necessario sint *CAD* atque *EBF* parallelæ. Erant vero *HAG* et *EBF* etiam parallelæ, ideoque per idem punctum *A* duæ ducerentur rectæ *HG* ct *CD* eidem *EF* parallelæ. Quod absurdum, seu axiomati contrarium. Quo ita demonstrato, duce Euclide absque offendiculo ad Prop. XXXII procedas, deindeque axioma XII duce Karstenio demonstres.

*) Cujus hæc est fere definitio: *angulus* est discrimen, quod inter directiones duarum rectarum mutuo sibi incidentium, (diversa gaudentium directione), intercedit. (De undecimo (= XII?) Euclidis Axiomate judicium, cui accedunt

definitione corrigenda laborarunt: quorum plerique, lineas parallelas nihil nisi invicem *æquidistantes* esse, crediderunt. Quorum nonnulli ut Ramus, Cataldi, Tacquet, Wolfius, Bezout, Bossut, Behr, Lüdike, Metternich, Kjellin *) aliique nulla adjecta demonstratione tacite admiserunt, lineam, cujus omnia puncta a data recta æque distant, etiam esse rectam lineam. Nemo vero non videt, hanc definitionem vitio subreptionis laborare: si enim omnia istius lineæ puncta per conditionem æquidistantiæ definimus, nobis haudquaquam, ut & eadem in eadem recta sint linea, jubendi erit facultas. Horum igitur omnium conatus junctim rejicere licet. — Reliqui vero, ut Clavius, Gjordano da Bitonto, Kircherus, Rob. Simson, Foex, Hancke, Schweikart aliique, hanc propositionem demonstrandam esse, bene quidem intellexerunt; pro dolor! tamen omnes successu caruerunt. Qui enim acutius ipsorum scripta scrutatur, aliquem semper paralogismum, aut quæ generis ejusdem sunt, in ipsorum demonstrationibus deteget **). Angustiæ vero loci cum

---

pauca de trisectione anguli. Jenæ 1824). Is vero tacite supponit ejusmodi axioma: "diversitas directionum duarum rectarum ubique spatii una eademque est."

*) Hunc auctorem huc retulimus, quia jam in definitione æquidistantem rectam appellat, simulque axioma (satis amplum) admittit, cujus ope deinde (Pr. 17) demonstret, rectam, cujus duo puncta alteri æquidistant, huic parallelam esse. Mox (Pr. 18) demonstrat, rectam, quæ uni parallelarum normalis est, etiam alteri normaliter insistere, deindeque (Pr. 19, 20) ad Eucl. Prop. 27—29 procedit. Sed ei etiam demonstrandum esset, lineam, quæ alteri æquidistat, rectam semper esse.

**) Lector J. Ekstrand parallelas lineas ut æquidistantes definit (Lärobok i Geometriens elementer, Jönköping 1833 pag. 56); moxque hujusmodi subjungit corollarium: linea, quæ rectæ æquidistat, ipsa est recta, hocque hujusmodi ar-

nobis habenda sit ratio, hoc jam prætereundum censemus. — Aliam parallelarum definitionem excogitarunt Varignon, Gumælius aliique; neque tamen hi omne tulerunt punctum.

Illam sane definitionem, quæ *parallelas* dicit eas lineas, quæ *eidem rectæ normaliter insistunt*, haud quidem omnino improbandam censemus. Tum vero simul demonstrandum est, eas et aliis perpendiculariter insistere posse. Tale quid *Gumælius* conatus est. Hujus vero definitio ita sonat: Parallelas dicimus lineas in eodem plano ita positas, ut alia quædam recta (*normalis* ipsi dicta), uni earum perpendicularis, alteri quoque perpendicularis sit. Qua igitur in re Wolfio qnidem consentit, in eo vero differt, quod Theorema Lamberti: *lineas parallelas communia ubique habere perpendicula*, quod Wolfius tacite admittit, demonstrare conetur. Quem in finem ille *(G.)* ita procedit: 1) rectam datæ parallelam per punctum (atque ad normalem per hoc punctum) datum ducere docet. 2) Parallelas nusquam concurrere. 3) perpendiculum ad crus alterum anguli acuti per punctum alterius intra angulum cadere. 4) Hypothenusam utramque cathetum superare. 5) Si eidem lineæ una perpendiculariter, altera vero (in alio quodam puncto) oblique insistit, hujus puncta inæqualiter ab illa distare. Qua quidem scala mox ad thesin Lambertinam (Pr. VIII) adscen-

---

gumentatione corroborare satagit: Quoniam enim ea, cui æquidistat, inter sua puncta, utut recta, ex æquo jacet; ipsa quoque æquidistans (vel huic parallela) ex æquo sua interjacet puncta, ideoque necessario recta sit. Unicuique vero patet, hanc demonstrationem necessaria carere perspicuitate, prætereaque Euclidis rectæ definitione superstruitur, de cujus bonitate multum disputatum fuit, quin imo plerique rectam definiri haud posse, crediderunt.

dit, deindeque parallelarum Theoriam in modum fere Wolffii Sacheriique conficit *). Primo quidem obtutu hæc ipsius Theoria bene sibi constare videtur, accuratius vero scrutando mendum in ultima scala latens, quo hiatus immeabilis patet, detegitur. Satis quidem bene in 5) demonstrat, punctorum obliquæ illius ab perpendiculari distantias ab altera parte primæ normalis ordinatim majores ab altera vero minores fieri; haud vero, hoc ultra limitem quemcunque datum valere, sicuti in Pr. VIII opus est, evincit; multum enim dubitari potest, num, obliquitate exsistente quam minima, perpendicula continuo alternatim ad obliquam atque ad primam perpendicularem ducendo ad distantiam a prima normali (cui utraque insistunt) quamcunque procedere liceat. Hoc saltem haud demonstravit. Huc accedit gravius quid, quod vix forsan nisi per ipsum Axioma XII demonstrari possit, lineam, quæ uni illarum oblique & recte eidem insistentium e suo puncto erigitur, alteri occurrere, quod tamen ille in sua constructione tacite admittit. Prof. vero Kjellin (Grunderne till Geometrien 1814) parallelas ut æquidistantes definit, nec has rectas esse demonstrat, atque axioma admittit, quod parum ab hac propositione Gumælii differt.

Tandem igitur nos ad eam convertamus *classem,* in qua *principiis Euclidæis omnis superstruitur demonstratio.* Qui vero ejusmodi conantur, vel Eucl. Ax. XII primum demonstrare inchoant, vel etiam aliam quandam propositionem fundamentalem. Horum itaque plerique eas propositiones, quas alii axiomatum instar habuerunt, demonstraturi adgrediuntur. Sed et his universim male cessit res: id, quod

---

*) **hujus thesin, lineam, cujus duo puncta ad easdem partes a recta æque distant, huic parallelam esse, §. X proponit.**

ex. gr. accidit Dominis Hindenburg & Bauckero, cum axioma, quod apud nostratem Strömer legitur, demostrarent. Neque multo felicius rationati sunt Legendre, Hauff, Krausius, Thibaut, & Meyer, qui propositionem in Eucl. Libr. 1. XXXII:dam primo sibi demonstrandam susceperunt. Qua quippe in re jam Cel. Lambertus docuit, parallelarum theoria prætermissa, tantummodo rigore geometrico demonstrari posse: *Angulos trianguli minores esse duobus angulis obtusis majoresque duobus acutis.* A priori igitur & hujus casus perspici videtur eventus. — Ad hanc classem referendi sunt Saccherius atque ipse Lambertus, qui propositionem quisque suam, apud Gumælium (§. VIII. & X) iterum exhibitam, tentarunt.

Alii aliud quoddam Theorema, ut illud de lateribus angulisque Parallelogrammi oppositis æqualibus aut simile tentarunt *).

*) *Falk* (in Practisk Lärobok i Geometrien och Trigonometrien med strängt? bevis i (!) läran om parallela lineer, Ups. 1831) rectam lineam haud definiri posse (p. 1) contendit; parallelas (P. 13) in modum Euclidis definit, moxque (Prob. 9—11) inquirere incipit, num in quadrangulo, tribus angulis exsistentibus rectis, quartus major vel minor recto esse possit. At vero ipsius Theoriæ membra disjecta recolligamus, ut videamus, num aliquod desideretur, cujus defectu reliqua in unum corpus organicum et integrum collimari nequeat, vel etiam, num aliquod horum ejusmodi laboret defectu, qui sinceram impediat partium coadunationem. Primum igitur Probl. 2 (pag. 6) normalem alteri ducit, moxque angulum rectum atque obliquum definit (def. 13), corollariumque subjungit unicam tantum normalem datæ per datum punctum duci posse, reliquis omnibis oblique datæ insistentibus. Tum (Probl. 4 p. 8) a dato puncto ad datam rectam lineam datæ longitudinis inclinare suscipit. Probl. 6. rectam et angulum bisecat. Quæ omnia vulgaria sunt, sed, sicuti reliqua, problematice proponuntur. Tandem Pr. 7 (pag. 11). punctum in alterutro anguli dati crure inquirit, quod dato longius ab altero distet, indeque colligit, puncta ab apice longinquiora magis distare ac propiora. Probl. 8 (p. 12) Eucl. prop.

Ii vero, qui *Eucl. Ax. XII simpliciter demonstrandum* adgrediuntur, principia satis diversa adhibent: nonnulli, ut Cel. Kæstner, Bürger,

---

XXVII et XXVIII. inquirit. Hucusque omnia satis bene sibi constare videntur, quamquam Probl. 4. Euclidæo more haud exprimatur. Tandem, ut diximus, Pr. 9 et seq. (p. 13—23) parallelarum Theoriam propius adgreditur, et primo inquirit, num connormales recta ita secare possit, ut angulus externus interno minor (Probl. 9) vel major (Probl. 11) sit; quas inter texit disquisitionem, num Trianguli angulus externus internis minor (Probl. 10) vel major (Pr. 12) esse possit, indeque Prop. XXXII. Euclidis colligit; tandemque hujus axioma XII ut Problema 15 (pag. 20) proponit utque ultimo (Pr. 22) parallelas ut æquidistantes agnoscit. Mireris forsan Propos. Eucl. XVI hac in serie haud occurrere, sed observes, hujus casum sub nomine coroll. def. 13. citari, quod eadem fere constructione demonstratur. Num vero omnia æque bene sibi constant? Si demonstrationem Probl. 9 accuratius inspicis, videbis, eum primo trapezium *GBDH* angulis *G, B, D* rectis præditum posuisse, basin *BD* per normalem *KI* bisecasse, deindeque si fieri posset, ut angulus quartus *GHD* obtusus foret, figuram *KGBI* circa *KI* convertendo ipsi congruam *KLDI* construxisse, indeque *GK* productam ipsam *LD* in puncto quodam *H* inter *L* et *D* positum tangere rite conclusisse. Deinde figuram *GBDLK* circa *DL* convertendo ipsi congruam *ONDLP* obtinuisse, lineamque *KLR* rectam fore demonstrasse, (angulis ad *L* ipsi recto ad *G* æqualibus exsistentibus), sicuti etiam rectam *GKH* productam secare lineam *RN* interius in puncto quodam *F*; ideoque (Pr. 7) *RF* superare *LH* seu *RO*. Sed hoc "seu *RO*" haud constat: tantum enim demonstratum est $ON = GB$ atque $RN = BM$, indeque solummodo concludere licet $OR = GM$, nihil vero inde patet de ratione ipsarum *OR* et *LH*. Nec igitur constat $OF > 2LH$ esse; quod tamen fundamentum est reliquæ demonstrationis. Nec conclusionibus Probl. 9 et 11 subscribimus, parallelarum angulum externum nunquam interno esse minorem vel majorem. Si enim vel demonstratio utraque bene sibi constaret, tamen conclusionem de lineis eidem normalibus valentem ad parallelas extendere haud licet, nisi antea demonstratum fuerit, has communi gaudere normali.

